$\{{}^{*}M_1^p, {}^{p}M_1^{*}\}$ (инвариантных), которым в P_n соответствуют $n-1$ пар из инвариантных прямых ${}^{p}L_1$ и инвариантных $(n-2)$-плоскостей ${}_{n-p}\ell_{n-2}$.

Рассмотрим пересечение $K_{2n-3}(x)$ и $\Delta_n(x)$:

$$K_{n-2}(x):\ t^n=0,\ t_p-\Lambda^n_{pq}t^q=0,\ \Lambda^n_{(pq)}t^pt^q=0. \tag{6}$$

Конусу $K_{n-2}(x)$ в P_n соответствует конус k_{n-2} прямых L_1

$$k_{n-2}:\ x^n=0,\ \Lambda^n_{(pq)}x^px^q=0,\ \Lambda^n_{(pq)}=\tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{pq}+\Lambda^n_{qp}) \tag{6'}$$

и конус k^{n-2} $(n-2)$-плоскостей $\ell_{n-2}=h(L_1)$

$$k^{n-2}:\ \xi_0=0,\ \tilde{\Lambda}^{(pq)}\xi_p\xi_q=0,\ \tilde{\Lambda}^{(pq)}_0=\tfrac{1}{2}(\Lambda^{pq}_0+\Lambda^{qp}_0), \tag{6''}$$

где x^J (ξ_J) -координаты тех точек (гиперплоскостей), которые инцидентны L_1 (ℓ_{n-2}), причем из (I) получаем

$$\tilde{\Lambda}^{(pq)}_0\Lambda^n_{p(r}\Lambda^n_{|q|s)}=\Lambda^n_{(rs)}. \tag{7}$$

3. Распределения Δ_n на M_{2n-1} при условии $\Lambda^n_{[pq]}\equiv 0$ ($n>3$).

Замыкая систему форм θ_p, а также (3) (или (4)), находим, что при этом условии инволютивное распределение Δ_n на M_{2n-1} имеет инволютивные ${}^{*}\Delta_{n-1}$ и Δ^{*}_{n-1} одновременно.

Т е о р е м а 2. Если на M_{2n-1} задано регулярное распределение Δ_n и $\Lambda^n_{[pq]}\not\equiv 0$, то конус k^{n-2} (k_{n-2}) касается конуса k_{n-2} (k^{n-2}) вдоль инвариантных прямых (($n-2$)-плоскостей).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5)-(5') вдоль инвариантных прямых ${}^{p}L_1$ (и только вдоль них при $\Lambda^n_{[pq]}\not\equiv 0$) подпространства $\mathcal{L}({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{pq}t^q]$, $R({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{qp}t^q]$ совпадают друг с другом, а также с $\Pi({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{(pq)}t^q]$ и $B({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{[pq]}t^q]$ [6]. Но $\mathcal{L}({}^{p}L_1)=h({}^{p}L_1)$, а $\Pi({}^{p}L_1)$-поляра прямой ${}^{p}L_1$ относительно конуса k_{n-2}. Поэтому $h({}^{p}L_1)$ инцидентна ${}^{p}L_1$ и является образующей конуса k^{n-2}, касается конуса k_{n-2}, а в силу обратимости преобразований $\mathcal{L}$, R, Π -инвариантной ($n-2$)-плоскостью на k^{n-2}.

Т е о р е м а 3. Если на M_{2n-1} задано регулярное распределение Δ_n и $\Lambda^n_{[pq]}\equiv 0$, то конус k^{n-2} (k_{n-2}) огибает конус k_{n-2} (k^{n-2}).

Для доказательства достаточно заметить, что в этом случае в уравнении (6″) имеем из (7) $\tilde{\Lambda}^{(pq)}_0=\Lambda^{(pq)}_0$, где $\Lambda^{(pr)}_0\Lambda^n_{(rq)}=\delta^q_p$.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

2. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос//Тр. семинара по векторн.и тензорн.анализу.М.;Л.,1950.Вып.8.

3. Б о ч и л л о Г.П. Поля квадратичных конусов и распределения на многообразии всех гиперплоских элементов в P_n// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб. науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1988.Вып.19.С.15-19.

4. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия: Уч.пособие/Калининск.ун-т.Калинин,1977.84с.

5. Б о ч и л л о Г.П. Распределения на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,1984.Вып.15.С.9-13.

6. К а й з е р В.В. Расширения, сужения и сопряженные направления дифференцируемых распределений в многомерных проективных пространствах//Геометр.сб./Томский ун-т.Томск,1975.Вып.15.

УДК 514.76.

КЛИФФОРДОВЫ СТРУКТУРЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

М.П.Б у р л а к о в
(Чечено-Ингушский ун-т)

Пусть M -дифференцируемое многообразие $\dim M=m$. Обозначим TM -тотальное пространство касательного расслоения над многообразием M и $\mathcal{F}(TM)$ -модуль векторных полей на TM. В координатной окрестности $U\subset M$ каждая точка $z\in TM$, $z=(x,y)$, $x\in M$, $y\in T_x$ имеет локальные координаты $x^1,x^2,\ldots,x^m,y^1,y^2,\ldots,y^m$, а векторное поле $\zeta\in\mathcal{F}(TM)$ в локальной записи имеет вид:

$$\zeta=\xi^i(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{I}$$

Построим над модулем $\mathcal{F}(TM)$ бесконечномерную алгебру Грассмана $\Lambda(TM)$, элементами которой являются формальные суммы грассмановых (внешних) произведений элементов модуля $\mathcal{F}(TM)$. Алгебра $\Lambda(TM)$

представляет собой калибровочное расширение алгебры $\Lambda_z = \Lambda(TM)|_{z\in TM}$,где Λ_z -вещественная алгебра Грассмана, $\dim \Lambda_z = 4^m$.

Аналогично строится дуальная к $\Lambda(TM)$ алгебра $\Lambda^*(TM)$, элементами которой являются линейные агрегаты внешних дифференциальных форм порядка $p=\overline{0,m}$.Алгебра $\Lambda^*(TM)$ представляет собой грассманову оболочку модуля $\Omega(TM)$ линейных дифференциальных форм на многообразии TM .В координатной окрестности линейная форма имеет локальную запись вида:

$$\omega = \alpha_i(x,y)\,dx^i + \beta_j(x,y)\,dy^j. \qquad (2)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(dx^j) = \frac{\partial}{\partial y^i}(dy^j) = \delta^j_i, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}(dy^j) = \frac{\partial}{\partial y^i}(dx^j) = 0, \qquad (3)$$

векторные поля ζ (I) можно рассматривать как операторы градуированного дифференцирования алгебры $\Lambda^*(TM)$.

Т е о р е м а I. Модуль $E(TM)=\mathcal{F}(TM)\oplus\Omega(TM)$ порождает бесконечномерную алгебру Клиффорда $C(TM)$ [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что свертки (3) индуцируют на модуле $E(TM)$ индефинитную псевдометрику g , определяемую для элементов $\zeta+\omega\in E(TM)$, $\zeta\in\mathcal{F}(TM)$, $\omega\in\Omega(TM)$ асимметричной поляризацией квадрата:

$$g(\zeta+\omega,\ \zeta+\omega) = \omega(\zeta), \qquad (4)$$

то есть

$$g(\underset{1}{\zeta}+\underset{1}{\omega},\ \underset{2}{\zeta}+\underset{2}{\omega}) = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}(\underset{2}{\zeta})+\underset{2}{\omega}(\underset{1}{\zeta})\right). \qquad (5)$$

В каждой точке $x\in M$ псевдометрика g представляет собой псевдоевклидову метрику типа $(2m\ ,2m\ )$.

В координатной окрестности $U\subset M$ положим:

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + dx^i, \quad e_{m+i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - dx^i,$$

$$e_{2m+i} = \frac{\partial}{\partial y^i} + dy^i, \quad e_{3m+i} = \frac{\partial}{\partial y^i} - dy^i.$$

Легко видеть, что

$$e_\alpha\cdot e_\beta + e_\beta\cdot e_\alpha = 2g_{\alpha\beta}, \qquad (6)$$

то есть элементы e_α представляют собой образующие алгебры Клиффорда, ассоциированной с псевдометрикой $g_{\alpha\beta}$.

Как модуль над кольцом функций на многообразии M алгебра Клиффорда $C(TM)$ является внешним произведением алгебр $\Lambda^*(TM)$ и $\Lambda(TM)$.

Т е о р е м а 2. Модуль $E(TM)=\mathcal{F}(TM)\oplus\Omega(TM)$ порождает на касательном расслоении бесконечномерную алгебру Вейля $W(TM)$ [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, кроме псевдометрики g ,свертки (3) индуцируют на модуле $E(TM)$ симплектическую структуру:

$$h(\underset{1}{\zeta}+\underset{1}{\omega},\ \underset{2}{\zeta}+\underset{2}{\omega}) = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}(\underset{2}{\zeta})-\underset{2}{\omega}(\underset{1}{\zeta})\right). \qquad (7)$$

Тогда алгебра $W(TM)$ получается факторизацией тензорной (контрвариантной) алгебры модуля $E(TM)$ по идеалу, порожденному элементами вида

$$v\otimes u - u\otimes v - h(v,u);\quad u,v\in E(TM). \qquad (8)$$

Алгебра Клиффорда $C(TM)$ позволяет определить на тотальном пространстве TM связность. Пусть $G\subset C(TM)$ -группа регулярных элементов алгебры $C(TM)$,либо некоторая подгруппа группы регулярных элементов. Спинорами группы G (коспинорами группы G) называются элементы $\xi\in C(TM)$ $(\eta\in C(TM))$, преобразующиеся под действием группы G по закону:

$$\xi' = a\cdot\xi \qquad (\eta' = \eta\cdot a^{-1}), \qquad (9)$$

где $a\in G$.Векторами группы G называются элементы ζ алгебры $C(TM)$, преобразующиеся под действием группы G по закону

$$\zeta' = a\cdot\zeta\cdot a^{-1}. \qquad (10)$$

Если ∂ -дифференцирование алгебры $C(TM)$,то элементы A из алгебры $C(MT)$, преобразующиеся под действием группы G по закону

$$A' = a\cdot A\cdot a^{-1} - \partial a\cdot a^{-1}, \qquad (11)$$

называются связностью, ассоциированной с группой G и дифференцированием ∂ .Связность A позволяет определить ковариантное продолжение дифференцирования ∂ :

$$\nabla\xi = d\xi + A\cdot\xi \qquad (\nabla\eta = \partial\eta - \eta\cdot A) \qquad (12)$$

для спиноров ξ (для коспиноров η) и

$$\nabla\zeta = \partial\zeta + A_1\cdot\zeta - \zeta\cdot A_2 \qquad (13)$$

для векторов группы G [3].

Спиноры, коспиноры и вектора позволяют конструировать тензорные или спинтензорные объекты как прямые произведения спиноров, коспиноров и векторов, факторизованные по линейным эквивалентностям.

Если на дифференцируемом многообразии M задана риманова или псевдориманова метрика g, то клиффордова структура на касательном расслоении может быть определена при помощи этой метрики. Действительно, на тотальном многообразии TM метрика g порождает метрику g^c, полученную как полный лифт метрики g. Факторизуя тензорную алгебру

$$\mathcal{P}(TM) = \mathcal{F}^0(TM) \oplus \mathcal{F}^1(TM) \oplus \mathcal{F}^2(TM) \oplus \dots , \tag{14}$$

где $\mathcal{F}^0(TM)$ кольцо функций $f: TM \to \mathbb{R}$ по идеалу, порожденному элементами вида

$$\zeta \otimes \zeta - g^c(\zeta, \zeta), \quad \zeta \in \mathcal{F}(TM), \tag{15}$$

получим бесконечномерную алгебру Клиффорда, которую мы обозначим $C_g(TM)$. Аналогично, лифт симплектической структуры на многообразии M порождает симплектическую структуру на многообразии TM, что позволяет определить на тотальном пространстве касательного расслоения бесконечномерную алгебру $R(TM)$ [2] как факторалгебру тензорной алгебры (14) по идеалу, порожденному элементами вида

$$\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi - h^c(\xi, \eta); \ \xi, \eta \in \mathcal{F}(TM), \tag{16}$$

где h -симплектическая метрика (невырожденная 2-форма) на M, а h^c -полный лифт этой формы в касательное расслоение. Если h^c невырождена, то алгебра $R(TM)$ будет алгеброй Вейля на тотальном пространстве TM.

Описанные выше конструкции бесконечномерных алгебр Клиффорда и Вейля могут быть осуществлены и на тотальном многообразии кокасательного расслоения T^*M. Сумма Уитни касательного и кокасательного расслоений доставляет новую базу для построения бесконечномерных алгебр, ассоциированных с дифференцируемым многообразием.

Если вместо касательного расслоения первого порядка рассмотреть касательные расслоения высших порядков, то мы получим бесконечномерные алгебры Клиффорда $C(T^kM)$ и Вейля $W(T^kM)$ на тотальных многообразиях T^kM.

Библиографический список

1.Б е р е з и н Ф.А. Метод вторичного квантования. М.:Наука, 1986.319с.

2.К и р и л л о в А.А. Элементы теории представлений.М.; Наука.1972.336с.

3.Б у р л а к о в М.П. Клиффордовы расслоения и калибровочные поля//Гравитация и теория относительности/Казанский ун-т. Казань,1986.Вып.23.С.30-36.

УДК 514.75

К ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ m-МЕРНЫХ ГИПЕРПОЛОС SH^{τ}_{m} РАНГА τ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Ю.В о л к о в а
(Калининградское ВИУИВ)

В n-мерном проективном пространстве P_n изучаются m-мерные вырожденные гиперполосы SH^{τ}_{m} ранга τ $(\tau < m < n)$ [2], вдоль любой плоской образующей E_{ℓ} ($\ell = m-\tau$) базисной поверхности V^{τ}_{m} каждой из которых касательная плоскость T_m не постоянна. Базисная поверхность V^{τ}_{m} вырожденной гиперполосы $SH^{\tau}_{m} \subset P_n$ образована из ∞^{τ} систем плоских $(m-\tau)$-мерных образующих E_{ℓ} [1]. Характеристика $\chi_{n-\tau-1}(A)$ гиперполосы SH^{τ}_{m} в каждой точке $A \in V^{\tau}_{m}$ проходит через соответствующую этой точке плоскую образующую [3], т.е. $E_{\ell}(A) \subset \chi_{n-\tau-1}(A)$.

В работе дано задание гиперполосы $SH^{\tau}_{m} \subset P_n$ в репере первого порядка и доказана теорема существования. Используется следующая схема индексов:
$p, q, \tau, s, t = \overline{1;\tau}$; $i, j, k, \ell = \overline{\tau+1, m}$; $a, b, c = \overline{1, m}$; $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{0, n}$;
$\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$.

В проективном пространстве P_n наряду с точечным репером $\{A_{\mathcal{J}}\}$ рассмотрим двойственный ему тангенциальный репер $\{\tau^{\mathcal{K}}\}$, элементы которого $\tau^{\mathcal{K}}$ являются гранями репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$:

$$(A_{\mathcal{J}}, \tau^{\mathcal{K}}) = \delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}. \tag{1}$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений данных реперов принимают вид

$$dA_{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}} A_{\mathcal{K}}, \quad d\tau^{\mathcal{J}} = -\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \tau^{\mathcal{K}}. \tag{2}$$